L. Ibn Khaldoun RADES	DEVOIR DE SYNTHESE 1	$2^{ème}$ Sciences 3 Durée : 2 h
Mr ABIDI Farid	**Mathématiques**	Décembre 2013

Exercice 1: (4 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

   a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $x.y'+y.x'=0$.

   b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x.x'+y.y'=0$.

   c) $\|\vec{u}\|=x^2+y^2$.

2. Soit a un réel non nul, b et c deux réels quelconques.

   a) Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une seule solution x_0 alors pour tout $x \neq x_0$, ax^2+bx+c est du signe de a.

   b) Si $b^2-4ac<0$ alors ax^2+bx+c ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

   c) Si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, alors $x_1+x_2=\frac{b}{a}$.

3. Soit n un entier supérieur ou égale à 1.

   Si P est un polynôme de degré n et si α est un zéro de P alors P est factorisable par $x-\alpha$.

Exercice 2 : (7 points)

1. On pose, pour tout x réel, $f(x)=3x^2-6x-24$.

   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation f(x) = 0.

2. Soit g le polynôme défini par $g(x)=12x^3+12x^2-21x+6$.

   Calculer g(-2) puis déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x réel , $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$.

3. On pose $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$.

   a) Donner l'ensemble D de définition de h.

b) Vérifier que, pour tout x de D, $h(x)=\dfrac{4x^2-4x+1}{x-4}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation h(x) ≥ 0.

Exercice 3: (9 points)

Une unité de longueur étant choisie. Soit A et B deux points distincts du plan tel que AB = 3.

Soit O le point tel que $\overrightarrow{AO}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. On désigne par C un point tel que OC = AB et les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires. On note J le milieu du segment [OC].

L'annexe ci-jointe à la page 3/3 est à compléter et à rendre avec la copie.

1. Soit I barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,1)$.

   Ecrire $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. En déduire que I est le symétrique de O par rapport à A.

2. Montrer que $3\overrightarrow{JO}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. En déduire que J est le barycentre des points pondérés $(A,4)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$.

3. Soit K le barycentre de (I, 2) et (C, 1). On considère le repère cartésien $\left(O,\overrightarrow{OA},\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$.

   a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, I et J puis montrer que $K\left(\dfrac{4}{3},1\right)$.

   b) Montrer que les points B, J et K sont alignés. En déduire une construction du point K.

4. Soit H l'image de J par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et H' le projeté orthogonal de H sur la droite (AB) .

   a) Placer H et H' sur la figure.

   b) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre J et passant par O. Déterminer et représenter $\mathscr{C}' = t_{\overrightarrow{AB}}(\mathscr{C})$.

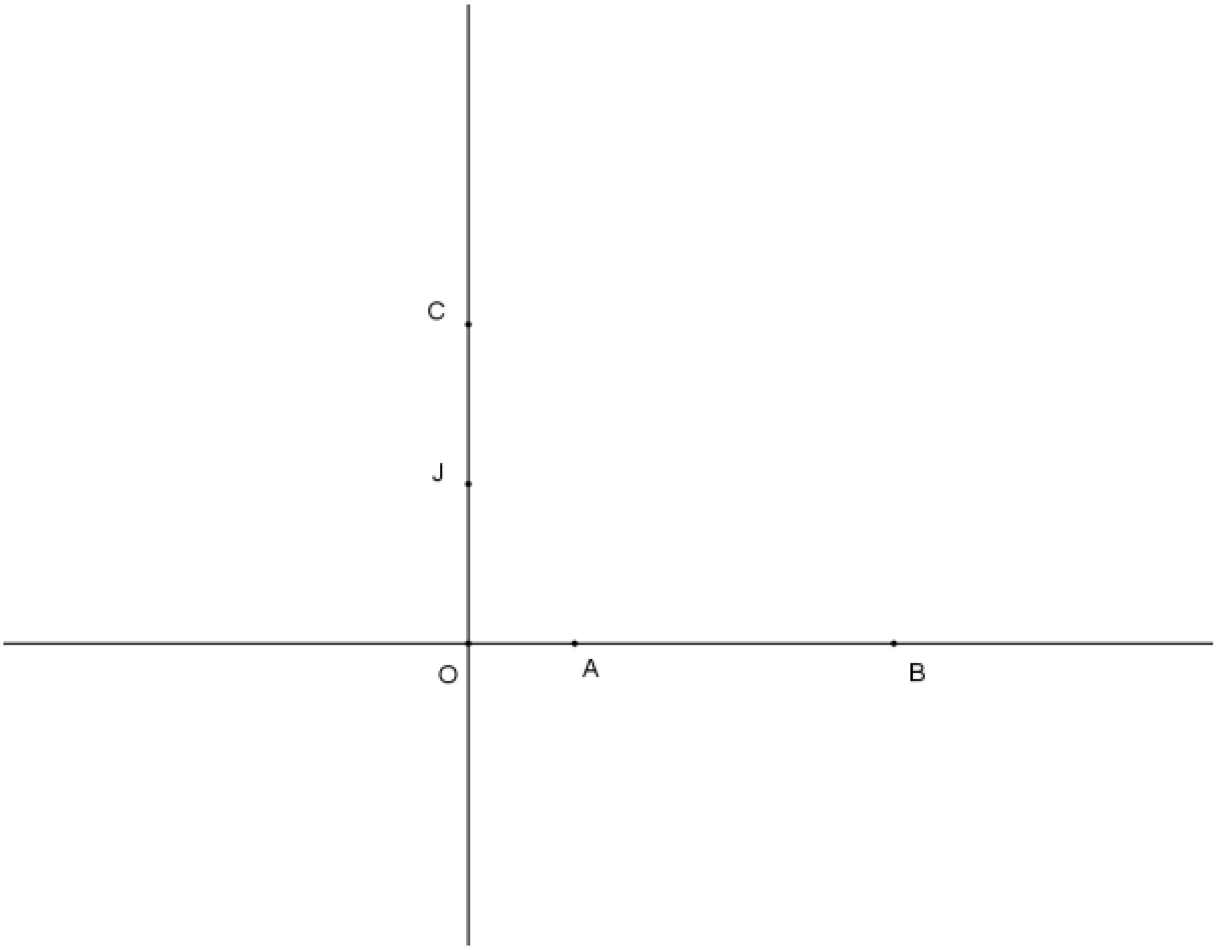
5. Soit M un point variable différent de O sur la droite (OC). La parallèle à la droite (AB) coupe la droite (HH') en N.

   a) Montrer que $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=N$.

   b) Déterminer et représenter l'ensemble des points N lorsque M varie sur (OC)\{O} ?

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève : ……………………………………………………….



CORRIGE

Exercice 1:

1. a) Faux

   b) Vrai.

   c) Faux.

2. a) Vrai.

   b) Vrai.

   c) Faux.

3. Vrai.

Exercice 2 : (7 points)

1. On a, pour tout x réel, $f(x)=3x^2-6x-24$.

L'équation $f(x)=0$ est équivalente à $3x^2-6x-24=0$.

Son discriminant réduit est $\Delta'=(-3)^2-3\times(-24)=81$. L'équation f(x) = 0 admet donc deux racines : $x_1=\dfrac{3-9}{3}=-2$ et $x_1=\dfrac{3+9}{3}=4$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation f(x) = 0 est $\{-2,4\}$.

2. Soit g le polynôme défini par $g(x)=12x^3+12x^2-21x+6$.

$g(-2)=12.(-2)^3+12.(-2)^2-21.(-2)+6=-96+48+42+6=0$.

Pour tout x réel , $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$.

D'où $\begin{cases}a=12\\b+2a=12\\c+2b=-21\\2c=6\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=12\\b=-12\\c=3\end{cases}$.

3. On pose $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

   a) h(x) est défini équivaut à $f(x)\neq 0$ équivaut à $x\neq -2$ et $x\neq 4$.

Donc, l'ensemble de définition de h est $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$.

b) Pour tout x de D,

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{(x+2)(12x^2-12x+3)}{3(x+2)(x-4)}=\frac{3(4x^2-4x+1)}{3(x-4)}=\frac{4x^2-4x+1}{x-4}.$$

c) L'inéquation h(x) ≥ 0 est équivalente à $\frac{4x^2-4x+1}{x-4}\leq 0$.

Remarquons que : $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		4		$-\infty$
$4x^2-4x+1$		+	‖	+	0	+	‖	+	
$x-4$		-	‖	-		-	‖	+	
h(x)		-	‖	-	0	-	‖	+	

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left]4,+\infty\right[$.